$$k_{22}^{o} = \frac{1}{1+0{,}25\Phi}\frac{3EI}{l}$$

U tom slučaju matrica krutosti štapa je:

$$k_g = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 \\ & \frac{1}{1+0{,}25\Phi}\frac{3EI}{l^3} & \frac{1}{1+0{,}25\Phi}\frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{1}{1+0{,}25\Phi}\frac{3EI}{l^3} \\ & & \frac{1}{1+0{,}25\Phi}\frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{1}{1+0{,}25\Phi}\frac{3EI}{l^2} \\ & sim. & & \frac{EF}{l} & 0 \\ & & & & \frac{1}{1+0{,}25\Phi}\frac{3EI}{l^3} \end{bmatrix} \qquad (62)$$

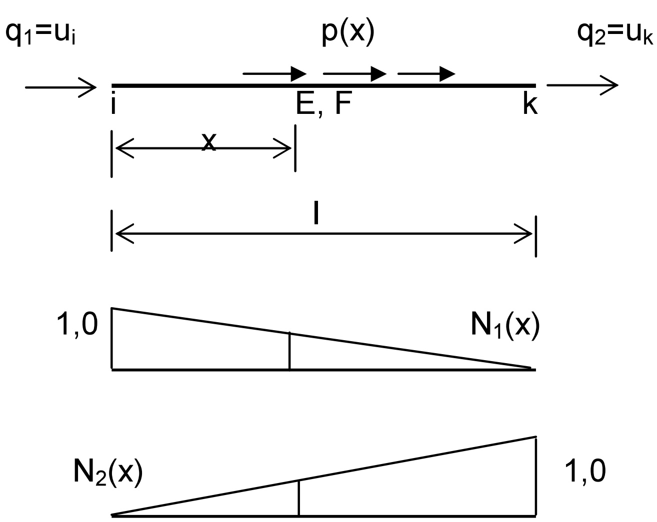
2.7. Varijacioni postupak

Za prave prizmatične štapove najpogodnije je izvođenje matrice krutosti i vektora ekvivalentnog opterećenja direktnim postupkom, na osnovu jasnog geometrijsko-statičkog značenja.
Varijacioni postupak se zasniva na stavu o stacionarnosti odgovarajućeg funkcionala. Za metodu deformacije radi se o funkcionalu potencijalne energije.

2.7.1. Aksijalno naprezanje

Aksijalno napregnut štap ima dva stepena slobode, s toga se pomjeranje u pravcu ose štapa u(x) može aproksimirati samo pomoću linearnih funkcija:

$$u(x) = \sum_{m=1}^{2} N_m(x)u_m = N\,q \qquad (63)$$



Slika 28.

Na slici 28 su prikazane linearne funkcije sa jediničnim vrijednostima u čvorovima. Matrica interpolacionih funkcija je:

$$N = \left[N_1(x) \quad N_2(x) \right] = \left[1 - \frac{x}{l} \quad \frac{x}{l} \right] \tag{64}$$

Vektor pomjeranja q u transponovanom obliku definisan je sa:

$$q^T = \left[q_1 \quad q_2 \right] = \left[u_i \quad u_k \right] \tag{65}$$

Linearna aproksimacija pomjeranja odgovara tačnom rješenju homogene diferencijalne jednačine aksijalno napregnutog štapa:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{p(x)}{EF}$$

Polazeći od izraza za deformacioni rad štapa:

$$A = \frac{1}{2} \int_s (N\varepsilon + M\chi + T\gamma) ds$$

vodeći računa da se radi o aksijalnom naprezanju, EF=const:

za: $N = F\sigma \quad \sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon = \dfrac{du}{dx}$

dobija se:

$$A = \frac{EF}{2} \int_s \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = \frac{EF}{2} \int_0^l \frac{(q_2 - q_1)^2}{l^2} dx = \frac{EF}{2l} (q_1^2 - 2q_1 q_2 + q_2^2)$$

Rad spoljašnjih sila koje djeluju na krajevima štapa je definisan sa:

$$R_s = N_1 u_i + N_k u_k = R_1 q_1 + R_2 q_2 = R^T q$$

Potencijalna energija štapa može da se napiše u sljedećem obliku:

$$\Pi = A - R_s = \frac{EF}{2l} (q_1^2 - 2q_1 q_2 + q_2^2) - R_1 q_1 - R_2 q_2$$

Primjenom stava o stacionarnosti potencijalne energije dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Pi}{\delta q_1} = 0 \qquad &\Rightarrow \frac{EF}{l}(q_1 - q_2) - R_1 = 0 \\ \frac{\delta \Pi}{\delta q_2} = 0 \qquad &\Rightarrow \frac{EF}{l}(-q_1 + q_2) - R_2 = 0 \end{aligned} \tag{66}$$

slijedi:

$$R_1 = \frac{EF}{l}(q_1 - q_2)$$

$$R_2 = \frac{EF}{l}(-q_1 + q_2)$$

Razvijeni matrični oblik prethodnih veza je:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \frac{EF}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

dok je skraćeni matrični oblik definisan sa:

$$R = k\,q$$

odakle slijedi matrica krutosti: $$k = \frac{EF}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (67)$$

Vektor ekvivalentnog opterećenja dobija se iz uslova da je rad ekvivalentnog opterećenja jednak radu stvarnog opterećenja koje djeluje na štap:

$$Q^T q = \int_0^l p(x)u(x)dx$$

Kada se u navedenu relaciju ubaci izraz (63) i skrati sa q dobija se:

$$Q^T = \int_0^l p(x)N(x)dx \qquad 8)$$

Za slučaj ravnomjerno raspodijeljenog opterećenja p_o dobija se:

$$Q^T = p_o \int_0^l \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} dx = \frac{p_o l}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (69)$$

Ako je opterećenje linearno promjenljivo slijedi:

$$Q^T = p_o \int_0^l \frac{x}{l}\begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} dx = \frac{p_o l}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Kada je spoljašnji uticaj temperatura duž ose štapa t(x) tada iz jednakosti rada ekvivalentnog opterećenja i rada usled temperature t(x):

$$Q^T = \int_0^l \varepsilon_o(x)\mathcal{N}(x)dx$$

$$\varepsilon_o(x) = \alpha_t t(x) \qquad \mathcal{N}(x) = EF\frac{du}{dx} = EF\frac{d}{dx}(N(x)q)$$

Slijedi:

$$Q^T = EF\int_0^l \varepsilon_o(x)\begin{bmatrix}-\frac{1}{l} & \frac{1}{l}\end{bmatrix}dx \qquad (70)$$

Koja za slučaj dejstva konstantne temperature duž štapa konstantnog poprečnog presjeka postaje:

$$Q^T = EF\alpha_t t_o\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}$$

2.7.2. Savijanje

Rješenje homogene diferencijalne jednačine štapa opterećenog na savijanje, EI=const:

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = 0 \qquad (71)$$

dato je sa:

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \qquad (72)$$

čiji je matrični oblik:

$$v = A\alpha \qquad (73)$$

gdje su:

$$A = \begin{bmatrix}1 & x & x^2 & x^3\end{bmatrix} \qquad \alpha^T = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix}$$

Koeficijenti α_i (i=1,2,3,4), generalisane koordinate, mogu da se odrede iz konturnih uslova:

$$\begin{aligned} &x = 0 \quad v(0) = v_i && x = l \quad v(l) = v_k \\ &\frac{dv}{dx} = \varphi_i && \frac{dv}{dx} = \varphi_k \end{aligned} \qquad (74)$$

Iz relacije (72) vodeći računa o uslovima (74) dobija se:

$$\begin{bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ v_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

Odnosno, u matričnom obliku:

$$q = C\alpha$$

Inverzijom prethodne relacije dobija se:

$$\alpha = C^{-1}q$$

gdje je:

$$C^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix}$$

Kada se u navedenu relaciju ubaci (73) dobija se:

$$v = A\alpha = AC^{-1}q = Nq = \sum_{m=1}^{4} N_m q_m \tag{75}$$

gdje su elementi vektora N interpolacionih funkcija:

$$N = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - 3(\frac{x}{l})^2 + 2(\frac{x}{l})^3 \\ N_2(x) &= l[\ \frac{x}{l} - 2(\frac{x}{l})^2 + (\frac{x}{l})^3\ ] \\ N_3(x) &= 3(\frac{x}{l})^2 - 2(\frac{x}{l})^3 \\ N_4(x) &= -l[\ (\frac{x}{l})^2 - (\frac{x}{l})^3\ ] \end{aligned} \tag{76}$$

Interpolacione funkcije koje su izvedene prestavljaju Hermite-ovi polinome prvog reda.
Značenje interpolacionih funkcija jednostavno se dobija kada se u izraz (75) stavi da je q_m=1, q_n=0 za n≠m slijedi:

$$v(x) = N_m(x)$$

što znači da intrpolacione funkcije $N_m(x)$ predstavljaju elastičnu liniju obostrano uklještenog štapa usled generalisanog pomjeranja q_m=1. Funkcije N1(x) i N2(x) su elastične linije usled transverzalnih pomjeranja a N2(x) i N4(x) su elastične linije usled jediničnih obrtanja krajeva obostrano uklještenog štapa, slika 29.
Prema izrazu za deformacioni rad dobija se:

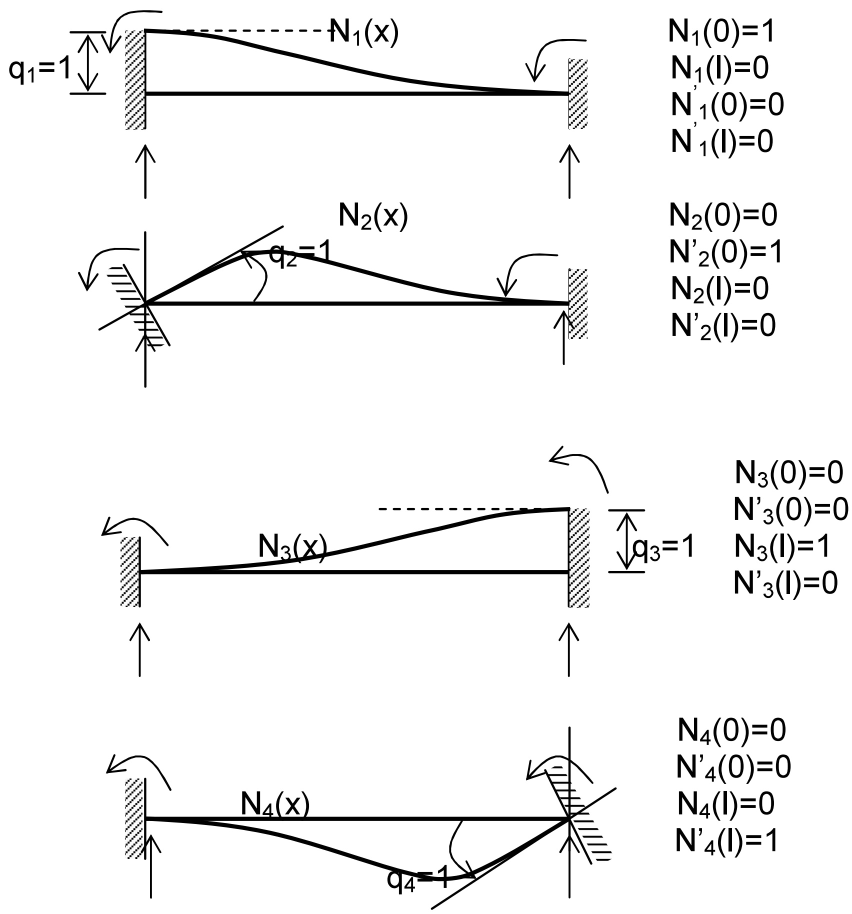
$$A = \frac{1}{2}\int_s (N\varepsilon + M\chi + T\gamma)ds = \frac{1}{2}\int_s EI(\frac{d^2v}{dx^2})dx = \frac{EI}{2}\int_0^l \sum_{m=1}^{4}\left[\frac{d^2}{dx^2}(N_m(x)q_m)\right]^2 dx$$

slijedi:

$$A = \sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{4} \ \frac{EI}{2}[\ \int_0^l N_m''(x)N''_n(x)dx\ ]q_m q_n = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{4}\ k_{mn}q_m q_n$$

gdje je:

$$k_{mn} = EI \int_0^l N_m''(x) N''_n(x) dx \tag{77}$$



Slika 29.

Deformacioni rad u matričnom obliku glasi:

$$A = \frac{1}{2} q^T k\, q$$

Rad generalisanih sila u čvorovima štapa je:

$$R_s = q^T R$$

tako da je potencijalna energija jednaka zbiru deformacionog rada i potencijala generalisanih sila u čvorovima:

$$\Pi = A - R_s = \frac{1}{2} q^T k\, q - R^T q$$

Primjenom stava o stacionarnosti funkcionala potencijalne energije:

$$\frac{\delta \Pi}{\delta q^T} = 0 \qquad \Rightarrow \quad k\,q - R = 0$$

dobija se veza generalisanih sila i generalisanih pomjeranja na krajevima štapa:

$$k\,q = R$$

Da bi se odredili elementi matrice krutosti potrebno je odrediti druge izvode interpolacionih funkcija:

$$\begin{aligned} N_1''(x) &= -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \\ N_2''(x) &= -\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2} \\ N_3''(x) &= \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \\ N_4''(x) &= -\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2} \end{aligned} \tag{78}$$

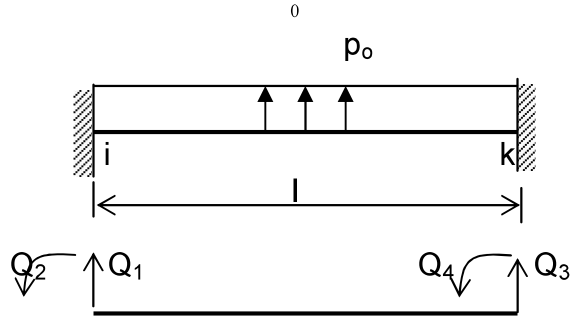
Kada se drugi izvodi definisani sa (78) ubace u (77), nakon integracije dobija se matrica krutosti:

$$k = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Vektor ekvivalentnog opterećenja dobija se iz uslova da je rad ekvivalentnog opterećenja jednak radu spoljašnjih sila koje djeluju duž ose štapa. Tako, usled transverzalnog opterećenja p(x) dobija se:

$$Q^T q = \int_0^l p(x) v(x) dx = \int_0^l p(x) N(x) q dx$$

slijedi: $$Q^T = \int_0^l p(x) N(x) dx$$



Slika 30.

Kada na štap djeluje ravnomjerno raspodijeljeno opterećenje p_o po cijeloj dužini štapa, slika 30, dobija se vektor ekvivalentnog opterećenja u sljedećem obliku:

$$Q = p_o \int_0^l \begin{bmatrix} 1-3(\frac{x}{l})^2+2(\frac{x}{l})^3 \\ l[\ \frac{x}{l}-2(\frac{x}{l})^2+(\frac{x}{l})^3\ ] \\ 3(\frac{x}{l})^2-2(\frac{x}{l})^3 \\ -l[\ (\frac{x}{l})^2-(\frac{x}{l})^3\ ] \end{bmatrix} dx = \frac{p_o l}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{l}{6} \\ 1 \\ -\frac{l}{6} \end{bmatrix}$$

Kada na štap djeluje temperaturna razlika $\Delta t(x)$ tada iz jednakosti rada sliejdi:

$$Q^T q = \int_0^l \chi_o(x)\mathrm{M}(x)dx$$

$$\varphi_o(x) = \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \qquad \mathrm{M}(x) = -EI\frac{d^2 v}{dx^2}$$

gdje je:
χ_o -.promjena krivine uled temperaturne razlike
M(x) – momenat savijanja duž ose štapa

3. Ravni nosači

Kod ravnih nosača ose svih štapova sa jednom od glavnih centralnih osa inercije njihovih poprečnih presjeka leže u ravni nosača. Opterećenje koje djeluje na nosač, takođe, leži u ravni nosača.
Zavisno od načina vezivanja štapova u čvorovima ravni nosači mogu biti:

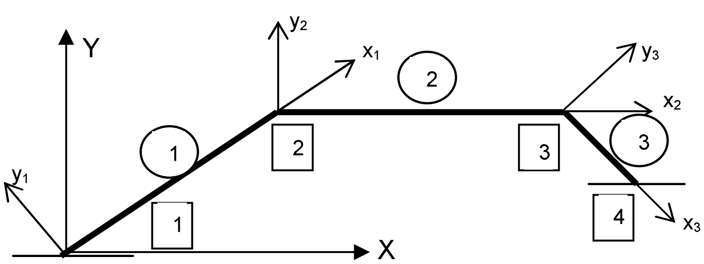
- **puni nosači** kod kojih postoji barem jedan čvor sa krutom vezom (ortogonalni okviri, kontinualni i simetrični nosači),
- **rešetkasti nosači** kod kojih su sve veze štapova zglavkaste.

U prethodnom je objašnjeno formiranje matrice krutosti i vektora ekvivalentnog čvornog opterećenja štapova koji su kruto ili zglavkasto vezani. Ove relacije za štapove osnova su za određivanje matrice krutosti i vektora ekvivalentnog opterećenja sistema štapova. Na taj način formira se sistem jednačina iz kojih se određuju pomjeranja i obrtanja čvorova, zatim, reakcije oslonaca i onda sila u pojedinim štapovima.

3.1. Puni nosači

3.1.1. Transformacija vektora generalisanih sila i pomjeranja iz lokalnog u globalni koordinatni sistem

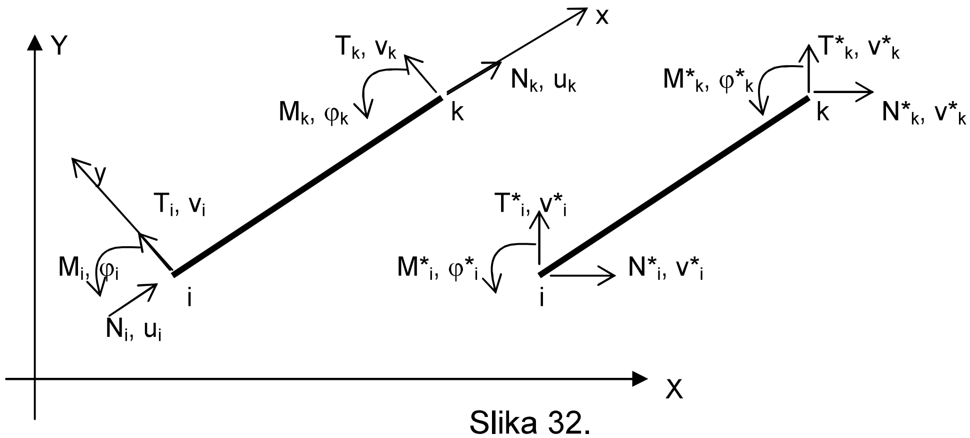
Do sada smo posmatrali štap kao nezavisan element koji je izdvojen iz sistema i analizu tog štapa sprovodili u pravouglom koordinatnom sistemu x, y, z koji nazivamo *lokalni kordinatni sistem*.
Koordinatni početak lokalnog koordinatnog sistema je u lijevom kraju štapa, osa x se poklapa sa osom štapa, a y i z ose se poklapaju sa glavnim osama inercije poprečnog presjeka. Svaki štap ima svoj lokalni kordinatni sistem x_i, y_i , pri čemu je *i* oznaka štapa, sl.31. Šematski prikaz oznaka štapova i čvorova ravnog punog nosača dat je na slici 31.



Slika 31.

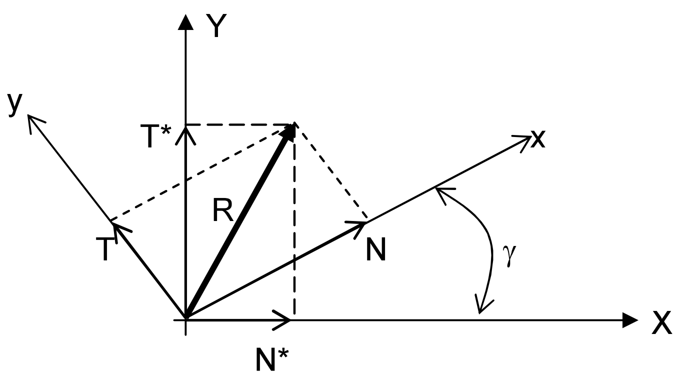
Za analizu sistema elemenata neophodno je da se definiše položaj svakog štapa u odnosu na jedan zajednički sistem koji se naziva *referentni ili opšti koordinatni sistem*. Na slici 31 globalni kordinatni sistem je označen sa velikim slovima, X,Y sistem. Zbog toga je potrebno izvršiti transformaciju vektora generalisanih sila, odnosno, pomjeranja, i matrice krutosti štapa iz lokalnog u globalni koordinatni sistem.

Na slici 32 su prikazane sile i pomjeranja na krajevima štapa u lokalnom (bez zvjezdice) i globalnom koordinatnom sistemu (sa zvjezdicom). Izvršićemo transformaciju sila i pomjeranja. Momenti i uglovi obrtanja su invarijante u odnosu na ova dva sistema.



Slika 32.

Na slici 33 su prikazane komponente vektora R i momenta M u lokalnom x,0,y i globalnom X,0,Y koordinatnom sistemu. Kako bi se razlikovale navedene komponente uvodi se oznaka * za komponente generalisanih sila i generalisanih pomjeranja u globalnom koordinatnom sistemu.



Slika 33.

Sa slike 33 je očigledno da važe sljedeće veze:

$$
\begin{aligned}
N &= N^*\cos\gamma + T^*\sin\gamma \\
T &= -N^*\sin\gamma + T^*\cos\gamma \\
M &= M^*
\end{aligned}
\qquad (79)
$$

Ukoliko se usvoje sljedeće oznake:

$$\lambda = \cos\gamma$$

$$\mu = \sin\gamma$$

u matričnom obliku relacije 79 imaju sljedeći oblik:

$$\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^* \\ T^* \\ M^* \end{bmatrix}$$

U sažetom obliku za kraj i važi da je:

$$R_i = t\, R_i^* \tag{80}$$

gdje su:
R_i – vektor generalisanih sila čvora i u lokalnom koordinatnom sistemu,
R^*_i – vektor generalisanih sila čvora i u globalnom koordinatnom sistemu,
t – matrica transformacije kraja i iz lokalnog u globalni koordinatni sistem.
Za kraj k, takođe, možemo napisati:

$$R_k = t\, R_k^*$$

Za štap i-k, s obzirom na navedeno, važi sljedeća relacija:

$$R = T\, R^* \tag{81}$$

gdje su:

$$R = \begin{bmatrix} R_i \\ \hline R_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ \hline N_k \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix} \qquad R^* = \begin{bmatrix} R_i^* \\ \hline R_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i^* \\ T_i^* \\ M_i^* \\ \hline N_k^* \\ T_k^* \\ M_k^* \end{bmatrix} \qquad T = \left[\begin{array}{c|c} t & 0 \\ \hline 0 & t \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & \mu & & & & \\ -\mu & \lambda & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & \lambda & \mu & \\ & & & -\mu & \lambda & \\ & & & & & 1 \end{array}\right]$$

T-matrica transformacije štapa,
t- matrica transformacije vektora u čvoru štapa

Na sličan način, projektovanjem vektora R na komponente u pravcu osa globalnog koordinatnog sistema X i Y dobija se:

$$\begin{bmatrix} N^* \\ T^* \\ M^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -\mu & 0 \\ \mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix}$$

Dobijena matrica transformacije jednaka je transponovanoj matrici t, pa se na sličan način koji je naveden za štap dobija da je:

$$R^* = T^T\, R \tag{82}$$

T^T – transponovana matrica matrice transformacije štapa T.
Upoređivanjem relacija 81 i 82 zaključije se da je:

$$T^T = T^{-1} \tag{83}$$

Iz ovog zaključka slijedi stav da je matrica T ortogonalna.

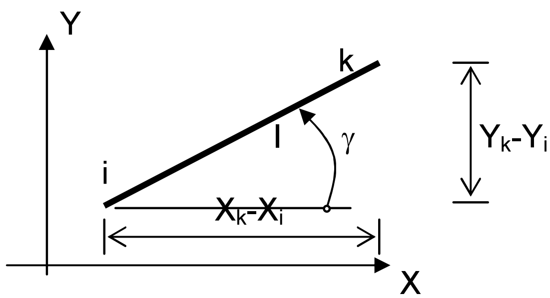
Vektor generalisanih pomjeranja i vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja se transformišu iz lokalnog u globalni koordinatni sistrem na isti način kao i vektor generalisanih sila:

$$q = T\, q^* \qquad Q = T\, Q^* \tag{84a}$$

odnosno,

$$q^* = T^T q \qquad Q^* = T^T Q \tag{84b}$$

U matrici T javljaju se kosinusi i sinusi uglova. Ugao je pozitivan ako je orijentisan suprotno od kazaljke na satu, slika 34.



Slika 34.

Kosinusi i sinusi mogu da se odrede pomoću koordinata čvorova:

$$\lambda = \frac{x_k - x_i}{l} \qquad \mu = \frac{y_k - y_i}{l}$$

Dužina štapa definisana preko kordinata čvorova štapa je:

$$l = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}$$

3.1.2. Transformacija matrice krutosti

Veza između generalisanih sila i generalisanih pomjeranja definisana je sa:

$$R = k\, q$$

pri čemu su:

$$R = T\, R^* \qquad q = T\, q^*$$

(85)

Slijedi:

$$T\, R^* = k\, T\, q^*$$

Nakon množenja prethodnog izraza, sa lijeve strane, članom T^T dobija se:

$$T^T T\, R^* = T^T k\, T\, q^*$$

S obzirom da je $T^T T = T^{-1}\,T = 1$
dobija se:

$$R^* = k^* q^*$$

pri čemu je: (86a)

$$k^* = T^T k\, T \tag{86b}$$

k* - je matrica krutosti štapa definisana u globalnom koordinatnom sistemu.

3.1.3. Matrica transformacije za štap tipa „g"

Za štap koji je na lijevom kraju kruto a na desnom kraju zglavkasto vezan matrica transformacije redukuje se na taj način što se brišu poslednja vrsta i poslednja kolona iz već izvedene matrice transformacije T štapa koji je obostrano kruto uklješten:

$$T_g = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & & & \\ -\mu & \lambda & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda & \mu \\ & & & -\mu & \lambda \end{bmatrix} \tag{87}$$

Mogu se napisati i sljedeće veze, transformacija vektora generalisanih sila i matrice krutosti, za štap tipa „g":

$$R_g{}^* = T_g^T\, R_g \qquad Q_g{}^* = T_g^T\, Q_g \qquad R_g{}^* = k_g{}^*\, q_g{}^* \qquad k_g{}^* = T_g^T k_g T_g \tag{88}$$

3.1.4. Jednačine sistema

Za svaki štap j veze između generalisanih sila i generalisanih pomjeranja na krajevima štapa mogu da se prikažu sljedećim izrazom:

$$R_j{}^* = k_j{}^*\, q_j{}^* - Q_j{}^* \tag{89}$$

gdje je:
R^*_j – vektor generalisanih sila štapa j u globalnom koordinatnom sistemu,
q^*_j – vektor generalisanih pomjeranja štapa j u globalnom koordinatnom sistemu,
k^*_j – matrica krutosti štapa j u globalnom koordinatnom sistemu,
Q^*_j – vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja štapa j u globalnom koordinatnom sistemu koji odgovara zadatim spoljašnjim uticajima duž ose štapa,
M - ukupan broj štapova sistema.